Többváltozós függvények differenciálszámítása

Binzberger Viktor

1999. május 28.

Topológiai alapfogalmak

Definíció $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ $\epsilon > 0$ **sugarú környezete** $K_{\bar{x},\epsilon} = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^n : |\bar{x} - \bar{y}| < \epsilon\}$

Definíció $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ $\epsilon > 0$ **sugarú kiszúrt környezete** $\dot{K}_{\bar{x},\epsilon} = K_{\bar{x},\epsilon} \setminus \{\bar{x}\}$

Definíció $A \subset \mathbf{R}^n$ **korlátos**, *ha létezik olyan* R, *hogy* $A \subset K_{\bar{0},R}$

Definíció *Az* $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ *pont az* A *halmaz*

1. **belső pontja**, *ha létezik* $\epsilon > 0$, *hogy* $K_{\bar{x},\epsilon} \subset A$
2. **külső pontja**, *ha létezik* $\epsilon > 0$, *hogy* $K_{\bar{x},\epsilon} \cap A = 0$
3. **határpontja**, *ha minden* $\epsilon > 0$ *-ra* $K_{\bar{x},\epsilon}$ *belemetsz* A*-ba és* A^C*-be*

Definíció $A \subset \mathbf{R}^n$ **nyílt**, *ha egyik határpontját sem tartalmazza*
$A \subset \mathbf{R}^n$ **zárt**, *ha minden határpontját tartalmazza*

Tétel $A \subset \mathbf{R}^n$ *nyílt és zárt egyszerre* $\Leftrightarrow A = 0$ *vagy* $A = \mathbf{R}^n$

Definíció *(Konvergencia)*
$\bar{x}_k \to \bar{x}$, *ha minden* $\epsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $N = N(\epsilon)$ *küszöb, hogy* $k \geq N$ *esetén* $|\bar{x}_k - \bar{x}\ | < \epsilon$

Tétel $\bar{x}_k \to \bar{x} \Leftrightarrow$ *az* $\bar{x}$ *bármely környezetén kívül csak véges sok* $\bar{x}_k$ *lehet.*

Tétel *A konvergencia koordinátánként történik*
azaz $\bar{x}_k \to \bar{x} \Leftrightarrow x_k^{(i)} \to x^{(i)}$ $(k \to \infty, i = 1, \ldots, n)$

Tétel *Az* $A \subset \mathbf{R}^n$ *halmaz zárt* $\Leftrightarrow$ *tartalmazza bármely* $\bar{x}_k \in A$ *konvergens sorozatának határértékét.*

Definíció *Az* $A \subset \mathbf{R}^n$ *halmaz* **torlódási pontja** $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$,
ha minden $\epsilon > 0$*-hoz létezik* $\bar{y} \in A$ $(\bar{x} \neq \bar{y})$, *hogy* $|\bar{x} - \bar{y}| < \epsilon$
azaz $\bar{x}$ *bármely környezetében van* A*-nak* $\bar{x}$*-től különböző pontja,*
azaz $\bar{x}$ *bármely környezetében végtelen sok pontja van* A*-nak.*

Definíció *Az* $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ **izolált határpontja** A*-nak, ha* $\bar{x}$*-nek van olyan környezete, amely* $\bar{x}$*-en kívül nem tartalmaz* A*-beli pontot.*

Tétel *A halmaz torlódási pontjai a belső pontok és a nem izolált határpontok*

Parciális határérték, határérték

Definíció *(Határérték)*
Ha $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ *torlódási pontja* $D_f \subset \mathbf{R}^n$*-nek, akkor*
$\lim_{D_f \ni \bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = A \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$*, hogy minden* $\bar{x} \in \dot{K}_{\bar{a},\delta} \cap D_f$ *esetén* $|f(\bar{x}) - A| < \epsilon$

Definíció *(Parciális határérték)*
Ha $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ *torlódási pontja* $X \subset D_f \subset \mathbf{R}^n$*-nek, akkor*
$\lim_{X \ni \bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = A \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$*, hogy minden* $\bar{x} \in \dot{K}_{\bar{a},\delta} \cap X$ *esetén* $|f(\bar{x}) - A| < \epsilon$

Tétel *Ha* $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = A$*, akkor minden parciális határérték* A*, azaz ha van két különböző parciális határérték, akkor* $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$ *nem létezik.*

Definíció
$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \infty \quad \Leftrightarrow \forall K > 0 \, \exists \delta > 0$*, hogy minden* $\bar{x} \in \dot{K}_{\bar{a},\delta} \cap X$ *esetén* $f(\bar{x}) > K$
$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = -\infty \Leftrightarrow \forall K < 0 \, \exists \delta > 0$*, hogy minden* $\bar{x} \in \dot{K}_{\bar{a},\delta} \cap X$ *esetén* $f(\bar{x}) < K$

Folytonosság

Tétel *(Átviteli elv)*
$\lim_{D_f \ni \bar{x} \to A} f(\bar{x}) = A \Leftrightarrow$ *bármely* $D_f \ni \bar{x}_k \to \bar{a}$*,* $\bar{x}_k \neq \bar{a}$ *esetén* $f(\bar{x}_k) \to A$

Tétel *(Bolzano-Weierstrass-tétel)*
Ha $\bar{x}_k \in \mathbf{R}^n$*,* $|\bar{x}_k| \leq A$ *akkor van egy* $\bar{x}_k \to \bar{x}^*$ *részsorozata.*

Definíció f **folytonos** *az* $\bar{a} \in D_f$ *pontban,*
ha $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$*, hogy minden* $\bar{x} \in K_{\bar{a},\delta} \cap D_f$ *esetén* $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \epsilon$

Definíció f **egyenletesen folytonos** *az* $K \subset D_f$ *halmazon,*
ha $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$*, hogy minden* $\bar{x}, \bar{y} \in K, |\bar{x} - \bar{y}| < \delta$ *esetén* $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \epsilon$

Tétel *Ha* f *és* g *folytonosak* $\bar{a}$*-ban, akkor* $c\,f$*,* $f \pm g$*,* $f\,g$*, továbbá* $g(\bar{a}) \neq 0$ *esetén* f/g *is folytonos* $\bar{a}$*-ban.*

Tétel *(Közvetett fv folytonossága)*
Ha g_i *függvények* $_{(i\,=\,1\,...\,n)}$ *folytonosak* $\bar{a} \in \mathbf{R}^d$*-ben, továbbá* f n*-változós és folytonos* $(g_1(\bar{a}) \ldots g_n(\bar{a}))$*-ban, akkor* $f(g_1(\bar{a}) \ldots g_n(\bar{a}))$ *is folytonos* $\bar{a}$*-ban.*

Tétel *Ha* $K \in \mathbf{R}^n$ *korlátos és zárt (azaz kompakt), továbbá f folytonos* K*-n, akkor*

1. f *korlátos* K*-n*
2. f *felveszi maximumát és minimumát* K*-n*
3. f *egyenletesen folytonos* K*-n*

Deriválás

DEFINÍCIÓ *$f(\bar{x})$ az i. változójában* **parciálisan differenciálható** *az $\bar{a}$ pontban, ha létezik és véges*

$$\lim_{\bar{x}_i \to \bar{a}_i} \frac{f(a_1 \ldots x_i \ldots a_n) - f(a_1 \ldots a_i \ldots a_n)}{(x_i - a_i)} = f'_{x_i}(\bar{a})$$

DEFINÍCIÓ *Legyen $f(\bar{x})$ értelmezve $\bar{a}$ egy környezetében ($\bar{a}$ D_f belső pontja). Az $f(\bar{x})$* **totálisan differenciálható** *$\bar{a}$-ban, ha*

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + A_1(x_1 - a_1) + \ldots + A_n(x_n - a_n) + \epsilon(x)$$

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{\epsilon(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{a}|} = 0$$

TÉTEL *Ha f totálisan differenciálható $\bar{a}$-ban, akkor $A_i = f'_{x_i}(\bar{a})$ $(i = 1 \ldots n)$, azaz*

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{a})(x_i - a_i) + \epsilon(\bar{x})$$

DEFINÍCIÓ *f $\bar{a}$ bázispontú első deriváltja az $\bar{x}$ helyen*

$$df(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{a})(x_i - a_i)$$

TÉTEL *Ha f totálisan differenciálható $\bar{a}$-ban $\Rightarrow$ folytonos $\bar{a}$-ban.*

TÉTEL *(Totális differenciálhatóság elégséges feltétele)*
Ha az $f'_{x_i}(\bar{x})$ deriváltak folytonosak $\bar{a}$-ban, akkor $f(\bar{x})$ totálisan diffható $\bar{a}$-ban.

TÉTEL *(*YOUNG TÉTELE *a vegyes parciális deriváltakról)*
Ha azf''_{xy} és f''_{yx} függvények közül legalább az egyik folytonos (a, b)-ben, akkor

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$$

Magasabbrendő deriváltakra hasonlóképpen kimondható.

Műveletek

TÉTEL *Ha f és g totálisan differenciálhatók $\bar{a}$-ban, akkor $c\,f$, $f \pm g$, $f\,g$, továbbá $g(\bar{a}) \neq 0$ esetén f/g is totálisan differenciálható $\bar{a}$-ban.*

Tétel *(Közvetett függvény deriválása)*
Ha a $g_1(x_1, \dots, x_m) \dots g_n(x_1, \dots, x_m)$ *függvények totálisan differenciálhatók az* $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ *pontban és az* $f(u_1, \dots, u_n)$ *függvény is totálisan differenciálható a* $\bar{b} = (g_1(\bar{a}), \dots, g_n(\bar{a}))$ *pontban, akkor az* $f(g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x}))$ *összetett függvény is totálisan differenciálható* $\bar{a}$ *-ban és*

$$f'_{x_i}(g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})) = f'_{u_1}(\bar{b})\ (g_1)'_{x_i}(\bar{a}) + \dots + f'_{u_n}(\bar{b})\ (g_n)'_{x_i}(\bar{a})$$

Azaz

$$\frac{\delta f}{\delta x_i} = \frac{\delta f}{\delta u_1}\ \frac{\delta g_1}{\delta x_i} + \dots + \frac{\delta f}{\delta u_n}\ \frac{\delta g_n}{\delta x_i}$$

Speciálisan

$$f'_{x_i}(g(x,y), h(x,y)) = f'_{u_1}(g(x,y), h(x,y))\ g'_x(x,y) + f'_{u_2}(g(x,y), h(x,y))\ h'_x(x,y)$$

Iránymenti deriválás

Definíció

$$grad\ f(\bar{a}) := f'(\bar{a}) = (f'_{x_1}(\bar{a}), \dots, f'_{x_n}(\bar{a}))$$

Definíció *Legyen* $\bar{e}$ *egységvektor. Ekkor* f *függvény* $\bar{e}$ **iránymenti deriváltja** $\bar{a}$*-ban*

$$D_{\bar{e}} f(\bar{a}) = lim_{t \to 0+} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}) - f(\bar{a})}{t}$$

Tétel *Legyen f totálisan differenciálható* $\bar{a}$ *-ban. Ez esetben* $D_{\bar{e}} f(\bar{a})$ *pontosan akkor lesz maximális, ha* $\bar{e}$ *egy* $grad\ f(\bar{a})$ *irányú egységvektor. Tehát a gradiensvektor mutatja a függvény leggyorsabb növekedésének az irányát.*

Alkalmazások

Tétel *Ha* f *totálisan differenciálható* (a,b)*-ben, akkor a* $z = f(x,y)$ **felület** (a,b)*-beli* **érintősíkja**

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Tétel *Ha* $\Phi(x,y,z)$ *totálisan differenciálható* (a,b,c)*-ben és* $\Phi(a,b,c) = 0$ *akkor a* $\Phi(x,y,z) = 0$ **implicit megadású felület** (a,b,c)*-beli* **érintősíkja**

$$\Phi'_x(a,b,c)(x-a) + \Phi'_y(a,b,c)(y-b) + \Phi'_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

Tétel *(Linearizálás) Ha* $\bar{x}$ *közel van* $\bar{a}$*-hoz, akkor* $f(\bar{x}) - f(\bar{a}) \approx df(\bar{a}, \bar{x})$

Implicit megadású függvények

Az implicit függvény általános alakja $F(\bar{x}, y) = 0$*, azaz* $F(\bar{x}, y(x)) = 0$

Definíció *(Implicit függvény keresési feladat)*
Adott $F(\bar{x}, y)$ *és tudjuk, hogy* $F(\bar{a}, b) = 0$*. Keresünk egy* $y = y(x)$ *függvényt, amire*

1. $y(\bar{a}) = b$
2. y *értelmezett az* $\bar{a}$ *pont egy környezetében*
3. $F(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$ *az* $\bar{a}$ *pont egy környezetében*

Tétel *(Az implicit függvény létezése, folytonossága)*
Legyen $F(\bar{a}, b) = 0$*,* $F(\bar{x}, y)$ *folytonos* $(\bar{a}, b)$ *egy környezetében és* $F'_y \neq 0$ *az* $(\bar{a}, b)$ *egy környezetében. Ekkor van* $\bar{a}$*-nak olyan* U *környezete és egyetlen olyan* U*-n értelmezett* $y(\bar{x})$ *függvény, amire*

1. $y(\bar{a}) = b$
2. $y(\bar{x})$ *folytonos* U*-n*
3. $F(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$*, ha* $\bar{x} \in U$

Tétel *(Inverz függvény differenciálhatósága)*
Ha az előbbi tétel feltételei teljesülnek, továbbá F *totálisan differenciálható* $(\bar{a}, b)$*-ben, akkor* $y(\bar{x})$ *is totálisan differenciálható* $\bar{a}$*-ban és*

$$y'_{x_i}(\bar{a}) = -\frac{F'_{x_i}(\bar{a}, b)}{F'_y(\bar{a}, b)} \qquad i = 1 \dots n$$